Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA-1111)
Septiembre-Diciembre 2007

Nombre: ______________________________

Carné: _______________ Sección: _____

2$^{\text{do}}$ Examen Parcial (35 %)
Duración: 1h 50min
Tipo F1

Justifique todas sus respuestas

Pregunta 1. Calcule los siguientes límites y en caso que alguno no exista explique por qué no.

(a) (5 puntos) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - |x-2| - 4}{|x-2|}$

(b) (4 puntos) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(5x)}{\tan(3x)}$

(c) (5 puntos) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+2}}{4x+3}$

Pregunta 2. (10 puntos) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos constantes. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{x+1} & \text{si } x < -1 \\ ax + b & \text{si } -1 \le x \le 0 \\ 1 - \cos^2(x) - x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Encuentre los valores de las constantes a y b para los cuales f es continua en $x = -1$ y $x = 0$.

Pregunta 3. Sea $f(x) = x - [x]$ en donde $[\cdot]$ representa la función parte entera. Es decir, $[x]$ representa el mayor número entero menor o igual a x.

(a) (2 puntos) Grafique la función f.

(b) (2 puntos) Calcule para $a \in \mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$. Justifique su respuesta.

(c) (1 puntos) Encuentre todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

Pregunta 4. (6 puntos) Demuestre que la ecuación $x\tan(x) = 1 - x$ tiene al menos una solución en los números reales.

Soluciones

1) (a) Por un lado,

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-|x-2|-4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-(x-2)-4}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x-2}{(x-2)}$$
$$= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} (x+1) = 3$$

Por otro lado,

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-|x-2|-4}{|x-2|} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-(2-x)-4}{(2-x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x^2+x-6}{(2-x)}$$
$$= \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{(2-x)} = \lim_{x\to 2^-} \frac{(x-2)(x+3)}{-(x-2)}$$
$$= -\lim_{x\to 2^-} (x+3) = -5$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-|x-2|-4}{|x-2|}$ no existe pues los límites laterales son diferentes.

(b) Sea $L = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\tan(3x)}$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\cos(5x)}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x)}} = \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)} \frac{\cos(3x)}{\cos(5x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(3x)} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(3x)}{\cos(5x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(5x)}{5\cdot 3x}}{\frac{\operatorname{sen}(3x)}{5\cdot 3x}} = \frac{\frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5x}}{\frac{1}{5} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x}} = \frac{5}{3}.$$

(c) $$\lim_{x\to -\infty} \frac{\sqrt{9x^2+2}}{4x+3} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}\sqrt{9x^2+2}}{\frac{1}{x}(4x+3)} = \frac{\lim_{x\to -\infty} \frac{-1}{|x|}\sqrt{9x^2+2}}{\frac{1}{x}(4x+3)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{1}{x^2}}\sqrt{9x^2+2}}{\frac{1}{x}(4x+3)} =$$
$$\lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}+\frac{2}{x^2}}}{\frac{4x}{x}+\frac{3}{x}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt{9+\frac{2}{x^2}}}{4+\frac{3}{x}} = \frac{-\sqrt{\lim\limits_{x\to -\infty} (9+\dfrac{2}{x^2})}}{\lim\limits_{x\to -\infty} (4+\dfrac{3}{x})} = \frac{-\sqrt{9+0}}{4} = \frac{-\sqrt{9}}{4} = \frac{-3}{4}$$

2) Tenemos que elegir a y b para que f sea continua en $x=-1$ y $x=0$. Queremos que $f(c) = \lim_{x\to c} f(x)$ para estos dos puntos. Trabajamos primero con $x=-1$. Tenemos que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{1-x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} (1-x) = 2,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} ax+b = -a+b$$

y $f(-1) = -a+b$, tenemos por lo tanto que

$$-a+b = 2. \tag{1}$$

Ahora trabajamos con $x = 0$, tenemos que $f(0) = b$,

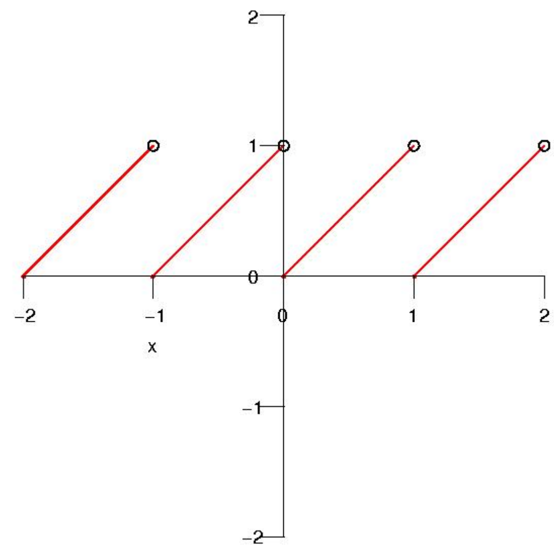
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} ax + b = -a + b = b,$$

y

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 - \cos^2(x) - x^2 = 1 - \cos^2(0) - 0^2 = 0$$

Por lo tanto $b = 0$, sustituyendo esto en la ecuación (1) obtenemos que $a = -2$.

3) (a) Grafica de f



(b) Tenemos que

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} (x - [x]) = \lim_{x \to a^+} (x - a) = 0$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (x - [x]) = \lim_{x \to a^-} (x - (a - 1)) = 1$$

(c) Como vimos en la parte anterior, $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe cuando $a \in \mathbb{Z}$ en vista que los límites laterales son diferentes. Si tomamos $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, entonces:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x - [x]) = a - [a].$$

4) La ecuación

$$x \tan(x) = 1 - x$$

es equivalente a

$$x \tan(x) - 1 + x = 0. \tag{2}$$

Definimos $f(x) = x\tan(x) - 1 + x$. Evaluamos f en $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{4}$. Entonces

$$f(0) = 0\tan(0) - 1 + 0 = -1 < 0 < \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi}{4}\tan(\frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{4} - 1 = f(\frac{\pi}{4})$$

Si verificamos que f es continua en el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$, entonces por el teorema del valor intermedio tendríamos que existe $c \in [0, \frac{\pi}{4}]$ tal que $f(c) = 0$ y tal c es una solución de la ecuación (2).

La función f es la suma de $f_1(x) = x\tan(x)$ y $f_2(x) = x - 1$. Basta ver entonces que f_1 y f_2 son continuas en $[0, \frac{\pi}{4}]$. La función $f_2(x) = x - 1$ es polinómica y por lo tanto continua en $\mathbb{R}$ y en particular continua en $[0, \frac{\pi}{4}]$. La función $f_1(x) = x\tan(x)$ es el producto de $f_3(x) = x$, que es continua en $[0, \frac{\pi}{4}]$ por ser una función polinómica, y $f_4(x) = \tan(x)$, que es continua en su dominio, como el intervalo $[0, \frac{\pi}{4}]$ es un subconjunto del dominio de la tangente, tenemos que f_4 es continua alli. Esto termina la prueba.